Οριςμος:

Θα λέμε οτι η συνάρτηση f ικανοποιεί μια συνθήκη Lipschitz στο $S \subseteq D_f$, με σταθερά $k>0$ εαν:

$$\| f(x,\bar{y}_1) - f(x,\bar{y}_2) \| \leq \| \bar{y}_1 - \bar{y}_2 \| \quad , \forall (x,\bar{y}] \text{ εν } S$$

Οριςμός:

Αν οι $\frac{\partial f}{\partial y_i}(x,\bar{y})$, $i=1,\dots,n$ υπάρχουν στο S, και είναι φραγμένες, συνεχείς τότε η f είναι k-Lipschitz με:

$$k = \max\{k_1, k_2\} \quad , \quad \left| \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y_i} \right| \leq k_i$$

ΦΥΛΛΑΔΙΟ

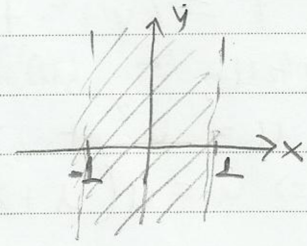
ΑΣΚΗΣΗ 1:

i) $g(x,y)=x^2\cos^2 y+y\cdot\sin^2 x$, $S=\{(x,y): |x|\le 1$, y αυθαίρετο$\}$

ΛΥΣΗ

Αρκεί νδο $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ είναι συνεχής & φραγμένη στο S

Έχουμε:



$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| = |x^2 2\cos y(-\sin y)+\sin^2 x| \le$$

$$\le x^2 2|\cos y|\cdot|\sin y| + \sin^2 x \le 2\cdot 1\cdot 1\cdot 1+1=3$$

Άρα, η g: 3-Lipschitz

ή με τον ορισμό

$$|g(x,y_1)-g(x,y_2)| = |x^2\cos^2 y_1 - x^2\cos^2 y_2 + y_1\sin^2 x - y_2\sin^2 x|$$

$$\le x^2 \underbrace{|\cos^2 y_1 - \cos^2 y_1|} + \sin^2 x|y_1-y_2| =$$

[ή μέσω τριγωνομετρίας]
ή μέσω ΘΜΤ (ΑΠ 1)

$$= x^2 |\cos y_1-\cos y_2|\cdot|\cos y_1+\cos y_2| + \sin^2 x|y_1-y_2|$$

$$\le 2x^2|\cos y_1 - \cos y_2| + |y_1-y_2| \le$$

$$\le 2x^2 \left|2\sin\left(\frac{y_2-y_1}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)\right| + |y_1-y_2|\le$$

$(|\sin x|\le|x|)$

$$\le 2\cdot 1\cdot \cancel{2}\cdot 1 \left|\frac{y_2-y_1}{\cancel{2}}\right| + |y_1-y_2| = 3|y_1-y_2|$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

i) ΝΔΟ η συνάρτηση

$g(x,y)=x\cdot y^2$, $S=\{(x,y): |x|\le 1$, y αυθαίρετο$\}$

δεν ικανοποιεί τη συνθήκη Lipschitz

ΛΥΣΗ

Έστω ότι $\exists\, k>0$ ώστε η g k-Lipschitz στο S

δηλ. έχουμε $|g(x,y_1)-g(x,y_2)|\le k|y_1-y_2|$, $(x,y)\in S$

Αφού, ισχύει γενικώς τότε θα ισχύει και για τη συγκεκριμένη περίπτωση. Άρα, για $x=1$ και $y_2=0$ θα πρέπει:

$|g(1,y_1)-g(1,0)| \le k|y_1-0|$, $\forall y_1 \in \mathbb{R}$

$y_1^2 \le k \cdot |y_1|$, $\forall y_1 \in \mathbb{R}$

$|y_1| \le k$, $\forall y_1 \in \mathbb{R}$ άτοπο διότι προκύπτει ότι για κάθε $y_1 \in \mathbb{R}$ $|y_1| \le k$ (δεν είναι κάθε πραγματικός και φραγμένος)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Υ-Μ)

Ας είναι $a,b>0$: $R=\{(x,y)\in D_f : |x-x_0|\le a, |\bar{y}-\bar{y}_0|\le b\}\subseteq D_f$

Αν η f k-Lipschitz στο R, τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (π.α.τ) της εξισώσεως

$\bar{y}' = f(x,\bar{y})$ και $\bar{y}(x_0)=\bar{y}_0$, έχει ακριβώς μια λύση $\bar{y}$ που ορίζεται τουλάχιστον στο $[\bar{x}_0-r, \bar{x}_0+r]$ με $r=\max\{a,\frac{b}{M}\}$ όπου

$M=\sup\limits_{(x,\bar{y})\in R}\|f(x,\bar{y})\|$.

Πχ (2 σελ. 23)

Έστω η διαφορική $y'=x^2+y^2$, $y(0)=0$

να εξετάσετε ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο στο πρόβλημα αρχικών τιμών

Λύση

Έστω $f(x,y)=x^2+y^2$, $x,y\in\mathbb{R}$

ας είναι $a,b>0$ και $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x-0|<a, |y-0|<b\}$

Η f συνεχής στο R ($(x,y)\mapsto x$, $(x,y)\mapsto y$ συνεχείς)

και $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |2y| = 2|y| \le 2b$

Άρα, η f 2b-Lipschitz στο R

Επομένως, από θεώρημα ύπαρξης μονοσήμαντου το παι έχει ακριβώς μια λύση y που ορίζεται (τουλάχιστον) στο διάστημα $[-r,r]$ με $r=\max\{a,\frac{b}{M}\}$

με $M=\sup\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)| = \max\limits_{\substack{|x|\le a\\|y|\le b}}|x^2+y^2| = a^2+b^2$

δηλ, $r=\max\left\{a,\frac{b}{a^2+b^2}\right\}$

ΠΡΟΤΑΣΗ.

Θεωρούμε ΠΑΤ:

$\bar{y}'(x) = A(x)\cdot\bar{y}(x) + b(x)$, όπου $f(x,\bar{y}) = A(x)\cdot\bar{y}(x) + b(x)$

(όπου $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ και $\bar{y}' = f(x,\bar{y})$)

όπου $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$ συνεχής $n\times n$ πίνακας

και $b : I \to \mathbb{R}^n$ συνεχής

Τότε το ΠΑΤ των εξισώσεων $\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0$ & $\bar{y}' = f(x,\bar{y})$

έχει μοναδική λύση που ορίζεται σε όλο το I

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Να εξεταστεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο των σ[υ]νόλων του Π.Α.Τ.

$$\begin{cases} y_1' = y_2^2 \\ y_2' = x + y_1^2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

ΛΥΣΗ

$$y' = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y_2^2 \\ x + y_1^2 \end{pmatrix} = \bar{f}(x,\bar{y}) = \bar{f}(x, y_1, y_2) =$$

$$= \begin{pmatrix} f_1(x, y_1, y_2) \\ f_2(x, y_1, y_2) \end{pmatrix} \Rightarrow y' = f(x,\bar{y})$$

ας είναι $a, b > 0$ και σύνολο

$R = \{ (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^3$ με $|x-0| \leq a$, $\max\{|y_1 - 0|, |y_2 - 0|\} \leq b \}$

$\forall (x,\bar{y}) \in R$ έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial y_1}(x,\bar{y}) \right| &= \max\{|0|, 2|y_1|\} \leq 2b \\ \left| \frac{\partial f}{\partial y_2}(x,\bar{y}) \right| &= \max\{2|y_2|, 0\} \leq 2b \end{aligned} \right\} \text{2b-Lipschitz}$$

και $M = \sup\limits_{(x,y)\in R} \| f(x,\bar{y}) \| = \max\{ f_1(x, y_1, y_2), f_2(x, y_1, y_2) \}$

« Οι σπάθες είναι πάντα ζωοδύναμες παντού! »

ΠΡΟΤΑΣΗ

Ας είναι $a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b$ (Ε)

με $b, a_i : I \to \mathbb{R}$ συνεχείς, $a_n(x) \neq 0$, $\forall x \in I$

και $x_0 \in I$. Τότε $\exists!$ μια ρίζα της (Ε)

που ορίζεται στο I και ικανοποιεί τις

αρχικές αυθαίρετες:

$$y(x_0) = c_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = c_{n-1}$$

για $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$.